***Теория вероятностей и математическая статистика***

## 1. Элементы комбинаторики

### Общие правила комбинаторики.

Рассмотрим k множеств $M_1$, $M_2$, $M_3$, …, $M_к$, содержащих по $m_1$, $m_2$, $m_3$,…, $m_к$ элементов соответственно. Выбирается по одному элементу из каждого множества и составляется еще одно множество. Число способов, которыми можно выбрать по одному элементу из каждого множества, равно произведению $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_к$. В этом и состоит основной *принцип произведения* комбинаторики.

В задачах теории вероятностей часто рассматриваются различные соединения (комбинации) k элементов из множества, содержащего n элементов (k≤n). Будем рассматривать такие соединения, в которые каждый элемент данного множества может входить не более одного раза, то есть соединения без повторений. Рассмотрим три вида соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Определение. *Размещениями* из n элементов по k элементов называются наборы k элементов, отличающиеся один от другого или самими элементами (составом элементов), или их порядком. Число размещений обозначается $A_n^k$.

Число размещений из n элементов по k элементов находится по формуле:

$$\boxed{\mathbf{A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}}. \qquad (1)$$

Определение. *Перестановками* из данных n элементов называются наборы из n элементов, различающихся только порядком.

Перестановки – это частный случай размещений. Число всех перестановок обозначают символом $P_n$. Число $P_n$ найти несложно. Для этого в формулу (1) подставляем k=n.

$$\boxed{\mathbf{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n!}}$$

Определение. Произведение n первых натуральных чисел называется *факториалом* числа n и обозначается символом n!(читается «эн факториал»).

$$\boxed{\mathbf{P_n = 1\cdot2\cdot3\ \ldots\cdot n = n!}} \qquad (2)$$

Приведем некоторые значения факториала:

$0!=1$, $5!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$,

$1!=1$, $6!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$,

$2!=1\cdot2=2$, $7!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$,

$3!=1\cdot2\cdot3=6$, $8!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=40320$,

$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$, $9!= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9=362880$.

<u>Определение.</u> *Сочетаниями*, содержащими k элементов, выбранных из n элементов заданного множества, называются всевозможные наборы k элементов, различающиеся хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначают $C_n^k$ или $\binom{n}{k}$.

Число сочетаний из n элементов по k элементов определяется формулой:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

**Примеры решения задач.**

1. Определить, сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр 7,8,9,3,2 без повторений.

Решение. Трехзначные числа можно рассматривать как размещения, так как при замене одной цифры другой или перестановке их местами получаются разные числа. Так как n=5, k=3, то различных чисел будет:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

2. К кассе за получением (или для уплаты) денег подошли одновременно 4 человека. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь?

Решение. Очередь состоит из 4 различных лиц, поэтому в каждом способе составления очереди учитывается порядок их расположения. Таким образом, имеют место перестановки из четырёх человек, их число равно:

$P_4 = 4! = 24$.

3.В цехе 18 человек, из них 10 мужчин. На конференцию отбирают 6 человек так, что было 3 мужчины и 3 женщины. Сколько различных списков можно составить?

Решение. 3-х мужчин из 10 человек можно отобрать $C_{10}^3$ различными способами, 3-х женщин из 8 можно отобрать $C_8^3$ различными способами. Следовательно, 3-х женщин и 3-х мужчин можно отобрать $C_{10}^3 \cdot C_8^3$ – различными способами.

Найдем: $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120$,

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 54.$$

Итого, число различных списков:

$C_{10}^3 \cdot C_8^3 = 120 \cdot 54 = 6480$.

## §2. Основные понятия теории вероятностей

Определение. Результат некоторого опыта или эксперимента, который нельзя заранее предсказать назовем *случайным событием*.

События обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C,…

Примеры наиболее часто встречающихся испытаний и событий приведены в таблице.

Определение. *Достоверным* назовем событие, которое обязательно произойдет в результате опыта.

Например, из урны с 20 красными шарами обязательно будет вынут красный шар.

Определение. *Невозможным* назовем событие, которое заведомо не произойдет в результате опыта.

Например, из урны с 20 красными шарами не будет вынут зеленый шар.

<table>
<tr><td>Испытания</td><td>События</td></tr>
<tr><td>1. Бросание монеты.</td><td>1. Выпал герб (орёл); выпала цифра (решка).</td></tr>
<tr><td>2. Бросание игральной кости.</td><td>2. Выпало 5 очков; выпало 3 очка; выпало чётное число очков; выпало не менее 3-х очков, ...</td></tr>
<tr><td>3. Извлечение карты из колоды.</td><td>3. Извлекли бубновую карту; достали туза; вытащили даму пик; извлекли не старше дамы, …</td></tr>
<tr><td>4. Извлечение шара из урны.</td><td>4. Извлекли белый шар; извлекли зелёный шар; вытащили шар с номером 2; …</td></tr>
<tr><td>5. Стрельба по мишени.</td><td>5. Попадание, промах; выбито 9 очков, …</td></tr>
<tr><td>6. Учащийся отвечает на вопросы теста.</td><td>6. Правильно ответил на все вопросы; на половину вопросов; хотя бы на один вопрос, …</td></tr>
<tr><td>7. Сажаются семена томата определённого сорта.</td><td>7. Взойдут 9 семян; все взойдут; взойдет не менее 5 семян, …</td></tr>
<tr><td colspan="2">Очевидно, что ряд таких примеров можно продолжать долго. В разряд испытаний можно отнести процессы, с которыми сталкиваемся достаточно регулярно, например: наблюдение за погодой (здесь событиями являются – ясный день, дождь, снег, ветер и т.д.); выход на работу в определенный день (приход на работу вовремя; опоздание; отгул и т.д.); нахождение в неблагоприятных условиях, при которых можно получить некоторое заболевание (заразиться гриппом; простыть на сквозняке; получить профзаболевание или травму на производстве и т.д.)</td></tr>
</table>

Определение. События A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого, в противном случае события называются *совместными*.

Рассмотрим пример. События: A – из колоды вынута крестовая карта, B – из колоды вынута бубновая карта, D – из колоды вынута дама.

События A и B – несовместные. События A и D – совместные, так как из колоды может быть вынута дама крестей, в этом случае произойдет и событие A – крестовая карта, и событие D – дама.

Определение. События $A$ и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если событие $\overline{A}$ происходит всякий раз, когда не происходит событие $A$ и наоборот.

Например, событие $A$– выпал герб при бросании монеты и событие $\overline{A}$– выпала цифра– противоположное.

Определение. События называются *равновозможными*, если нет основания считать, что одно из них произойдет скорее, чем другое.

Определение. *Элементарными* событиями назовем все результаты испытания, которые являются попарно несовместными и равновозможными. Те элементарные события, в которых наступает событие A, назовем *благоприятствующими* появлению события A.

Определение. *Вероятностью* события A (обозначается **P(A)**) называется отношение числа m благоприятствующих исходов к общему числу n элементарных исходов опыта (классическое определение вероятности).

Итак, вероятность события A определяется формулой:

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}},$$

где m – число элементарных событий, благоприятствующих событию A, n – число всех элементарных исходов испытания.

Например, в урне 10 красных и 7 зеленых шаров, достаем 1 шар. Рассмотрим события: A – из урны вынут красный шар, B – из урны вынут зеленый шар. Найдём вероятности этих событий.

Решение: всего в урне 17 шаров, тогда n = 17. Благоприятствующими исходами для события A будет извлечение любого из 10 красных шаров, то есть m = 10, таким образом $P(A)=\frac{10}{17}$; аналогично, $P(B)=\frac{7}{17}$.

Пример. На конференцию из группы студентов из 20 человек (8 девушек, 12 юношей) отбирают 5 человек. Найти вероятность следующих событий:

A – среди отобранных студентов одни юноши,

B – среди отобранных студентов одни девушки,

C – среди отобранных 2 девушки и 3 юношей.

Решение. Заметим, что общее число исходов для всех трех событий будет одинаковым n= $C_{20}^{5}$.

Число благоприятствующих исходов: $m_A = C_{12}^{5}$, $m_B = C_{8}^{5}$, $m_C = C_{8}^{2}\cdot C_{12}^{3}$.

Следовательно, получаем вероятность появления события A:

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{C_{12}^{8}}{C_{20}^{5}}=\frac{12!}{5!\cdot 7!}:\frac{20!}{5!\cdot 15!}=\frac{12!\cdot 5!\cdot 15!}{5!\cdot 7!\cdot 20!}=$$

$$=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15!}{7!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=0{,}051.$$

Найдем вероятность появления события B.

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}=\frac{8!\cdot 5!\cdot 15!}{5!\cdot 3!\cdot 20!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 15!}{3!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=0{,}006$$

Аналогично получаем:

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{C_8^2\cdot C_{12}^3}{C_{20}^5}=\frac{8!\cdot 12!\cdot 5!\cdot 15!}{2!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 9!\cdot 20!}=\frac{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 3!\cdot 4\cdot 5\cdot 15!}{2!\cdot 6!\cdot 3!\cdot 9!\cdot 15!\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=$$

$$=\frac{7\cdot 8\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=0{,}0795.$$

**Заметим**, что вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного равна 0. Вероятность случайного события А заключена между 0 и 1. Итак, для любого события верно неравенство: $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

### §3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Определение. *Суммой* А + В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий.

В частности, если события А и В несовместные, то А + В – событие, состоящее в появлении только одного из этих событий.

Определение. *Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}}.$$

**Следствие**: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boxed{\mathbf{P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}}$$

Пример. В ящике 15 деталей, среди которых 5 окрашенных. Сборщик наудачу достает 3 детали. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей окрашенной окажется хотя бы одна деталь.

Решение. Требование – хотя бы одна из трёх деталей окрашена – будет осуществлено, если произойдет любое из следующих 3 несовместных событий: В – одна деталь из трех окрашена, С – две детали из трех окрашены, D – три детали окрашены. Интересующее нас событие А можно представить в виде суммы событий: А = В + С + D, и по теореме о вероятности суммы несовместных событий получаем

P(A) = P(B) + P(C) + P(D).

$$P(B) = \frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}=0{,}495;$$

$P(C) = \dfrac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \dfrac{20}{91} = 0{,}220;$

$P(D) = \dfrac{C_5^3}{C_{15}^3} = \dfrac{2}{91} = 0{,}022;$

тогда $P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \dfrac{45}{91} + \dfrac{20}{91} + \dfrac{2}{91} = \dfrac{67}{91} = 0{,}736.$

(Если сложить числа 0,495, 0,220 и 0,022, то получится 0,737, что не равно 0,736. Погрешность получается в результате округлений.)

Определение. Два события А и В называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не меняется от появления или непоявления другого и наоборот.

Пример. Рассмотрим две урны с шарами. В каждой урне по 5 красных и 6 синих шаров. Из каждой урны один за другим вынимаются два шара, но в первой урне шары возвращаются (урна с возвратом), а во второй урне не возвращаются (урна без возврата). Рассмотрим событие А – второй вынутый из урн шар красный. В первом случае (с возвратом) вероятность события А не зависит от того каким был вынут первый шар (красный или синий), а во второй урне (без возврата) вероятность события А зависит от того, какой был вынут первый шар (красный или синий).

Условную вероятность появления события В при условии, что произошло событие А обозначим символом:

$P_B(A)$ или $P(A/B)$.

Определение. *Произведением* двух событий А и В называют событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий. Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$\boxed{\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}}$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие уже наступило:

$$\boxed{\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}.$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий.

## §4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Определение. Будем говорить, что события $B_1$, $B_2$, …, $B_n$ образуют полную группу событий, если:

1. Событие $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ достоверное;
2. События $B_i$ и $B_j$ – попарно несовместные ($i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,n$, $i \neq j$).

Утверждение. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу равна 1.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1.}$$

Пример. Студент на экзамене может получить одну из четырех оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно». События $B_1$ – получил «отлично»,

$B_2$ – получил «хорошо»,

$B_3$ – получил «удовлетворительно»,

$B_4$ – получил «неудовлетворительно»

попарно несовместные и в сумме – событие достоверное, так как обязательно происходит одно из этих событий. Следовательно, события $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ образуют полную группу событий.

Для нахождения вероятности события A, которое может произойти при условии осуществления одного из несовместных событий $B_1$, $B_2$, …, $B_n$, образующих полную группу, используется формула:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

События $B_1$, $B_2$, …, $B_n$ называются гипотезами.

Пример. В урну, содержащую два шара, опущен зеленый шар. Найти вероятность того, что будет вытащен из урны зеленый шар, если равновероятны первоначальные представления о цвете шаров.

Решение. Событие A– извлечен зеленый шар.

Возможны следующие гипотезы о первоначальном составе шаров:

$B_1$ – первоначально зеленых шаров не было в урне;

$B_2$ – был 1 зеленый шар;

$B_3$ – оба шара зеленые.

По условию задачи гипотезы равновероятны и образуют полную группу событий, следовательно, вероятность каждой из гипотез равна ⅓, то есть $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = ⅓$. Тогда условные вероятности наступления события А при появлении каждой из гипотез будут соответственно равны:

$P_{B_1}(A) = ⅓$; $P_{B_2}(A) = ⅔$; $P_{B_3}(A) = 1$.

Отсюда по формуле полной вероятности получаем:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)$.

$P(A) = ⅓ \cdot ⅓ + ⅓ \cdot ⅔ + ⅔ \cdot 1 = ⅔$.

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий.

Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$ могут быть переоценены по следующей формуле:

$$\boxed{P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}},$$

где i = 1, 2, 3,…, n.

Эта формула называется <u>формулой Байеса</u>.

Пример. Два автомата производят одинаковые детали, поступающие на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй 84%. Наудачу взятая деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь сделана первым автоматом.

Решение. Рассмотрим событие А – деталь отличного качества.

Можно составить две гипотезы:

$B_1$ – деталь сделана первым автоматом, причем $P(B_1) = ⅔$, так как его производительность вдвое больше производительности второго автомата.

$B_2$ – деталь сделана вторым автоматом, причем $P(B_2) = ⅓$.

Условная вероятность появления события А при выполнении гипотезы $B_1$ равна $P_{B_1}(A) = 0{,}6$.

Условная вероятность появления события А при выполнении гипотезы $B_2$ равна: $P_{B_2}(A) = 0{,}84$.

Отсюда вероятность появления события А равна:

$P(A) = ⅔ \cdot 0{,}6 + ⅓ \cdot 0{,}84 = 0{,}68$.

Тогда вероятность того, что деталь отличного качества сделана первым автоматом, по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3\cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

**§5. Формула Бернулли**

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же, а именно равна p ($0< p < 1$). Следовательно, вероятность непоявления события А в каждом испытании также постоянна и равна $q = 1 - p$.

Часто возникает задача вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие А наступит ровно k раз.

Искомая вероятность обозначается $P_n(k)$.

Например, символ $P_5(3)$, означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следовательно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вероятности того, что в n испытаниях событие наступит : а)менее t раз; б) более t раз; в) не менее t раз; г) не более t раз находят соответственно по формулам :

а) $P_n(0) + P_n(1)+\ldots+ P_n(t-1)= P_n(k<t)$,

б) $P_n(t+1) + P_n(t+2) + \ldots + P_n(n) = P_n(k>t)$,

в) $P_n(t) + P_n(t+1) + \ldots + P_n(n) = P_n(k\geq t)$,

г) $P_n(0) + P_n(1) +\ldots + P_n(t) = P_n(k\leq t)$.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна p=0,7. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна p=0,7. Следовательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна $q =1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Из условия задачи следует, что $n = 6$; $k=4$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot(0{,}7)^4\cdot(0{,}3)^2 = 0{,}324.$$

## §6. Локальная теорема Лапласа

Формула Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появиться в n испытаниях ровно k раз: $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

При применении формулы учитывается, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно.

Естественно, возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, если число испытаний велико, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно.

Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

<u>Локальная теорема Лапласа.</u>

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$\boxed{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$$

где $x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $q = 1 - p$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$,

соответствующие положительным значениям аргумента x (см. приложение 1).

Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как $\varphi(x)$ – функция четная, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании
равна 0,2.

Решение. По условию, n=400; k=80; p=0,2; q=0,8.

Воспользуемся формулой Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$x = (k - np) / \sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0{,}2) / 8 = 0$

По таблице приложения 1 находим φ(0)=0,3989.

Искомая вероятность:

$$P_{400}(80)=(1/8)\cdot 0{,}3989=0{,}04986.$$

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены): $P_{400}(80)=0{,}0498$.

## §9. Дискретные случайные величины.

### Закон распределения дискретной случайной величины

<u>Определение.</u> *Дискретной* называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями.

То есть, возможные значения дискретной случайной величины можно перенумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным (счетным).

<u>Определение</u>**.** *Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой возможные значения $x_i$, а вторая–вероятности $p_i$.

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| p | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

В случае, когда множество значений дискретной случайной величины конечно, сумма вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Если множество возможных значений случайной величины x бесконечно (счетно), то закон распределения будет иметь следующий вид:

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | … |

где ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ сходится и его сумма равна единице:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины x может быть также задан аналитически

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

или с помощью функции распределения.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1;p_1)$, $M_2(x_2;p_2)$, …, $M_n(x_n;p_n)$ ($x_i$ – возможные значения, $p_i$ – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения*.

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 3 | 6 | 8 |
| P | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

Построить многоугольник распределения.

Решение. Построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения $x_i$, а по оси ординат–соответствующие вероятности $p_i$.

Построим точки $M_1(1; 0,2)$, $M_2(3; 0,1)$, $M_3(6; 0,4)$ и $M_4(8; 0,3)$. Соединив эти точки отрезками, получим искомый многоугольник распределения.

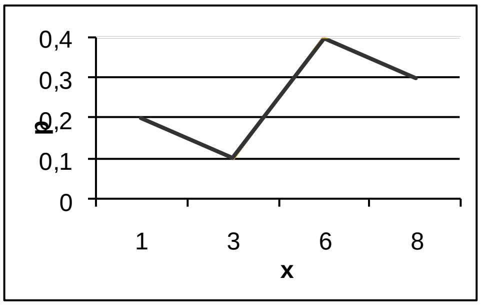


Рис.1 Многоугольник распределения.

Пример 2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в первом опыте равна 0,1. составить закон распределения числа отказавших элементов в первом опыте.

Решение. Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в первом опыте) имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни один из элементов устройства не отказал), $x_2 = 1$ (отказал один элемент), $x_3 = 2$ (отказали два элемента), $x_4 = 3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли. Учитывая, что по условию n = 3, p = 0,1 (следовательно, q = 1 – 0,1 = 0,9), получим:

$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729$;

$P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,243$;

$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027$;

$P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001$.

Контроль: 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1.

Получаем закон распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.729 | 0,243; | 0,027 | 0.001 |

## §10. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины M(X) называется число, равное сумме произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности их появления:

$$\boxed{M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n}$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых (то же относится к разности):

$$M(X \pm У) = M(X) \pm M(У).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot У)=M(X) \cdot M(У).$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X)=C \cdot M(X).$$

Определение. *Дисперсией* (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{D(X)=M[X-M(X)]^2}.$$

**Теорема.** *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$\boxed{D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2}.$$

**Доказательство.** Математическое ожидание M(X) есть постоянная величина, следовательно, $2 \cdot M(X)$ и $M^2(X)$ есть также постоянные величины. Приняв это во внимание и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упростим формулу, выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M[X-M(X)]^2 = M[X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X)+M^2(X)] = M(X^2)-2 \cdot M(X) \cdot M(X)+M^2(X) =$$
$$=M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Итак,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Квадратная скобка введена в запись формулы для удобства ее запоминания.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$D(X + C) = D(X).$$

Пример1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | –5 | 2 | 3 | 4 |
| P | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Решение. Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Дисперсию можно вычислить, исходя из ее определения, однако воспользуемся формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

которая быстрее ведет к цели.

Напишем закон распределения $X^2$:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | 25 | 4 | 9 | 16 |
| P | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Найдем математическое ожидание $X^2$:

$$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4+4 \cdot 0{,}3+9 \cdot 0{,}1+16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Найдем искомое среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Определение. Дискретная случайная величина X, вероятности значений которой находятся по формуле Бернулли, называется распределённой по *биномиальному* закону. В таком случае говорят, что X имеет биномиальное распределение.

Теорема.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределённой по биномиальному закону, вычисляются по формулам:

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q, \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q},$$

где n – число испытаний; p – вероятность появления события q – вероятность непоявления события.